

Distinciones de la Didáctica Científica de las Matemáticas para la Investigación de la Enseñanza y los Aprendizajes

Dra. Leonora Díaz Moreno

Doctora en Ciencias de la Educación.

Académica del Programa de Doctorado de Educación
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
Santiago Chile

Resumen

Nociones centrales de una didáctica científica de las matemáticas se instalan desde mediados de la década del setenta. Inicia con desarrollos de la didáctica fundamental construida sobre la base de las distinciones de Brousseau y de la didáctica fenomenológica que arranca de distinciones de Freudenthal situados en Europa continental, a los que se añade una didáctica socioepistemológica de raíces latinoamericanas, que se inscribe en los desarrollos de la matemática educativa en nuestro continente. Distinciones originarias del campo de la enseñanza y los aprendizajes en matemáticas como la transposición didáctica de saberes y los obstáculos epistemológicos, cognitivos, didácticos y socioculturales a los aprendizajes, se vienen transfiriendo a la investigación didáctica en otras disciplinas del currículum.

Palabras Clave

Didáctica Científica, Didáctica Fundamental, Didáctica Fenomenológica, Didáctica Socioepistemológica

Abstract

Central slight knowledge of a Scientific Didactics of the mathematics settle from mid the Seventies. It initiales with developments of the constructed Fundamental Didactics on the base of the distinctions of Brousseau and the Phenomenological Didactics that starts of distinctions of Freudenthal located in continental Europe, to which a Socioepistemological Didactics by Latin American roots is added, that registers in the developments of mathematical the educative one in our continent. Original distinctions of the field of education and the learnings in mathematics like the didactic transposition of saberes and epistemologic, cognitives, didactic and sociocultural obstacles to the learnings, come transferring to the didactic investigation in other disciplines from the currículum.

Key Words

Scientific Didactics, Fundamental Didactics, Phenomenological Didactics, Socioepistemological Didactics.

... y separó Dios la luz de la tiniebla
llamó Dios a la luz "día" y a la tiniebla "noche".

Génesis, 1:4

Refiere el texto bíblico -a modo de metáfora- al gesto fundacional para dar cuenta de pasos primeros en la gestación de mundos. Distinguir entre lo que se confunde, dando nombres. Comenius en el siglo XVII

When the first
up to a towhead
hacked off corners

establece primeras distinciones modernas para una tradición que pudiésemos llamar didáctica, cuyo desarrollo continúa hasta hoy. Lo hace en Hungría, cuando el desarrollo de la ciencia básica es aun incipiente, el saber sistemático de mundo a comunicar cabe en textos clave al alcance del dominio de unos pocos y el auditorio a quien comunicarlo es más bien reducido y/o privado. Ocho veces en su vida debe abandonar su patria. Para reparar los daños causados por la guerra, trata de reformar todo el plan educativo por medio de su obra *Didáctica magna, universal omnes omnia docenti artificium* (*Didáctica Magna, el arte de enseñar todo a todos*).

El desarrollo de la ciencia hoy es explosivo, autoacelerado. El saber sistemático de mundos a comunicar no cabe en textos clave ni está al alcance del dominio de unos pocos adultos. El auditorio a quien ahora se quiere comunicar ese cúmulo de saberes es masivo. Y corren aires de democratizar tales saberes. En esta deriva histórica se va distinguiendo a una didáctica "general" de unas didácticas específicas. Deriva que se explica, entre otros, desde tres ámbitos: (a) desde el avance de los dominios de saberes a ser enseñados; (b) desde los aportes de los dominios disciplinarios a la base de la didáctica: de la psicología educativa, de la pedagogía, de la filosofía, de la historia de las ciencias y de la sociología; y, (c) desde las confluencias de los enfoques macro y micro, objetivo y subjetivo que cristalizan en las ciencias humanas, abriendo miradas a la investigación en las didácticas específicas. Lo anterior ha profundizado las miradas y preocupaciones de la didáctica de la matemática en orden a mejorar nuestras prácticas de enseñanza con vistas a robustecer los logros de aprendizajes matemáticos.

El mundo anglosajón emplea la expresión "Mathematics Education" para referirse al área de saber didáctico, misma que en Francia (también en Alemania, España y otras regiones de Europa continental) se denomina "Didáctica de la Matemática". En tanto que para los desarrollos con acentos instruccionales de las escuelas española, alemana y ex soviética se recurre a la expresión "Metodología de Conocimientos Específicos" (Cantoral, 1999). En el amplio abanico de acercamientos a la investigación de la enseñanza y los aprendizajes de las matemáticas tales como la *ethnomatemática*, con indagaciones más allá y más acá del aula y aquella investigación educativa de raíz anglosajona más allá y más acá de saberes matemáticos escolares específicos, ubicamos a la investigación en didáctica de la matemática, campo de la didáctica científica de la matemática en desarrollo que privilegia síntesis propias y apropiadas a nuestros requerimientos situados en los desafíos de enseñar y aprender matemáticas en las aulas.

Distinciones de la investigación en el dominio de la didáctica científica de las matemáticas. El campo de la didáctica científica de las matemáticas presenta hoy un panorama con diversidad de paradigmas, de enfoques y aproximaciones preocupados por tomar en cuenta las dimensiones sociales y culturales de los procesos de enseñanza y aprendizaje (Artigue, 2003 refiriendo a Sierpiska y Lerman, 1996); constructivistas inspirados por la epistemología genética de Piaget, socio-constructivistas, interaccionistas, antropológicos así como el programa de investigación latinoamericano de la socioepistemología. Este presta especial atención tanto a la naturaleza sistémica de esos procesos de enseñanza y de aprendizaje como al carácter de construcción sociocultural de los saberes matemáticos. En este escenario la investigación didáctica matemática viene desarrollando múltiples marcos teóricos y metodologías que caracterizan los modos en que se eligen, expresan y abordan las preguntas de investigación. Obteniendo distintos tipos de resultados y diversidad de descripciones.

Nociones centrales de una didáctica científica de las matemáticas se instalan desde mediados de la década del setenta. Inicia con desarrollos de la didáctica fundamental construida sobre la base de las distinciones de Brousseau (1987) y de la didáctica fenomenológica que arranca de distinciones de Freudenthal (Soto, 1993) situados en Europa continental a los que se añade una didáctica socioepistemológica de raíces latinoamericanas, que se inscribe en los desarrollos de la matemática educativa en nuestro continente (Cantoral, 2004). Distinciones originarias del campo de la enseñanza y los aprendizajes en matemáticas como la transposición didáctica de saberes y los obstáculos epistemológicos, cognitivos, didácticos y socioculturales a los aprendizajes, se vienen transfiriendo a la investigación didáctica en otras disciplinas del currículum.

La Didáctica Fundamental de la Matemática. La didáctica fundamental de la matemática, de origen francés, articula dos campos teóricos que sin ser independientes son distintos: el de la teoría de las situaciones didácticas iniciado por Guy Brousseau a comienzos de la década de los 70 y al cual diferentes



investigadores han contribuido desde entonces y el de la transposición didáctica desarrollado a comienzos de la década de los 80 por Yves Chevallard. Ambas miradas dirigen sus lentes a la epistemología de la matemática, dan forma y determinan en cierta medida el enfoque del estudio de la preparación matemática de los estudiantes. No obstante, estas teorías tienen objetivos diferentes, ambas se plantean el estudio de los fenómenos didácticos en un enfoque sistémico, aunque se refieren a niveles diferentes del análisis didáctico, uno local o micro sistémico y el otro global o macro sistémico.

La teoría de las situaciones didácticas se sitúa en un nivel local: ella apunta a modelar las situaciones de enseñanza, de manera a permitir una elaboración y una gestión controlada. En un enfoque sistémico, la mirada se centra sobre sistemas didácticos, constituidos en torno de un profesor o profesora y de sus estudiantes. Sistemas de duración limitada, sumergidos en el sistema global de enseñanza, abiertos, vía este último, a la noosfera del sistema de enseñanza y, más allá, a la sociedad en la cual se inscribe el sistema de enseñanza. Fundada en un enfoque constructivista, parte del principio de que los conocimientos se construyen por adaptación a un medio que aparece al menos problemático para los estudiantes.

Contrato Didáctico, Situaciones A-Didácticas y Didácticas son nociones nucleares. Para Brousseau el estudio y control de las condiciones en las cuales se constituyen los conocimientos permitirá reproducir y optimizar los procesos de adquisición escolar de conocimientos. En esta tarea de producción de conocimientos da forma a la noción del contrato didáctico y a la teoría de las situaciones. Por la noción de contrato didáctico entiende "un conjunto de reglas, frecuentemente implícitas, que pesan sobre los alumnos y el profesor y que condicionan su trabajo" (Brousseau, 1987, p. 5). Refiere a un conjunto de acuerdos tácitos que determinan implícitamente lo que tanto el alumno como el maestro deben manejar y de lo que es responsable uno frente al otro. Es el medio en el cual se pone en escena lo que este autor llama la situación didáctica.

Según el autor, el alumno sólo habrá adquirido verdaderamente el conocimiento cuando él mismo sea capaz de ponerlo en acción, en situaciones que encontrará fuera de todo contexto de enseñanza, y en ausencia de cualquier indicación intencional. A estas situaciones las llama a-didácticas y será el maestro el responsable de determinar y presentar al alumno las que estén a su alcance. Por su parte, la situación didáctica es aquella más amplia en que el profesor se encuentra implicado en un juego con el sistema de interacciones del alumno con los problemas que él le plantea, donde comunica, o se abstiene de comunicar, según sea el caso, informaciones, preguntas o métodos de aprendizaje.

Por su parte, la teoría de la **transposición didáctica** apunta al análisis de los procesos que, a partir de los saberes de referencia y principalmente aquellos productos legitimados por la institución matemática "sabía", conducen a los objetos de enseñanza que viven cotidianamente en las clases. Y ella busca, más allá de tal o cual estudio particular, poner en evidencia ciertas leyes y regularidades en estos procesos transpositivos complejos. Yves Chevallard acuña la noción de Transposición Didáctica para referirse al proceso de transformación que experimenta un objeto del saber matemático establecido por la comunidad matemática con el propósito de constituirlo en objeto de enseñanza de matemática.

Este autor plantea una "reconceptualización" de lo didáctico sobre la base de un pequeño conjunto de nociones esenciales, a saber: **objeto, sujeto, institución, y relación personal e institucional a un objeto** (Chevallard, 1992). Con su nueva articulación conceptual amplía los marcos teóricos que toman a la matemática como sistema conceptual o como lenguaje, propugnando el estudio de la actividad matemática entendida como una actividad humana entre las demás. Para estudiar al hombre haciendo matemáticas se debe partir de lo antropológico para analizar la emergencia de lo matemático. Ningún registro de la actividad humana -matemático u otro- está limitado, ni definido de una vez por todas de manera autónoma e independiente del resto de las actividades sociales, esto es, la especificidad de lo matemático, y de lo didáctico dentro de lo matemático, no se puede hallar únicamente dentro de lo matemático. Así las personas, las instituciones y los objetos forman asociaciones complejas que este enfoque nombra ecosistemas o universos de objetos.



En este marco, la propuesta de **sensibilidad a lo ostensivo** en matemática de Bosh (1994) alerta a que el sujeto recibe sus "maneras de hacer" de la institución y que ésta funciona a través de sus sujetos. Bosh introduce la noción de "**objeto ostensivo**" como uno de los objetos de la actividad humana distinguiéndolo de los restantes a los que llama "**objetos no - ostensivos**". Caracteriza a los primeros por tener una valencia semiótica y una valencia instrumental, esto es, ser portadores de un significado a la vez que posibilitar el desarrollo de una tarea y que, por ende, en tanto instrumentos para la actividad matemática pueden condicionar tanto su desarrollo como su gestión. Por su parte, los niveles interdependientes de lo sintáctico, lo semántico y lo pragmático -afirma- "permiten afinar el análisis de la dialéctica entre lo ostensivo y lo no-ostensivo en la actividad matemática" (ob. cit. Bosh, p. 62). Por medio de la presentación y aplicación en su trabajo del "análisis ostensivo" establece la necesidad de relevar el fenómeno de la sensibilidad de las técnicas a lo ostensivo en la relación a lo matemático y más aún la sensibilidad de la cultura didáctica a la dimensión ostensiva de la actividad matemática.

En un enfoque de raíces cognitiva y antropológica, Duval complementa las miradas de indagación para la intervención de los fenómenos didáctico-matemáticos. En su aproximación teórica de los **registros de representación semiótica**, se propone un aprendizaje de la matemática específicamente centrado en la conversión de las representaciones semióticas a fin de articular y coordinar los diferentes registros de representación en los cuales es representado un determinado objeto matemático. El foco de su indagación es por el tipo de estructura cognitiva implicada en la actividad matemática.

Para Duval (1993) el análisis del desarrollo de los conocimientos y de los obstáculos encontrados en los aprendizajes fundamentales relativos al razonamiento, a la comprensión de textos y a la adquisición de tratamientos lógicos y matemáticos, enfrenta tres fenómenos estrechamente ligados, a saber, la **diversificación de registros**, la **diferenciación entre representante y representado** y la **coordinación entre registros**. En los estudios psicológicos sobre la adquisición del conocimiento o sobre sus transformaciones, distingue tres formas de presentar la noción de representación, estas son: mental, computacional y semiótica. Esta última se caracteriza por ser una representación de tipo consciente y externa y, como tal, cumple las funciones cognitivas de comunicación, objetivación y tratamiento. En consecuencia, el autor propone un aprendizaje de la matemática específicamente centrado en la conversión de las representaciones semióticas a fin de articular y coordinar los diferentes registros de representación en los cuales es representado un determinado objeto matemático. No es posible lograr esta articulación con una ejercitación de convertibilidad de casos típicos de representaciones, por una parte, debido a que están los casos de representaciones no-congruentes, y por otra, a que la conversión de las representaciones requiere de la identificación de las unidades significantes en el registro de partida y en el de llegada. Para dicha articulación entonces, se hace necesaria la **discriminación de las unidades significantes propias a cada registro**, problema que Duval considera "debe ser el objeto de un aprendizaje específico", a fin de establecer las reglas de correspondencia semiótica entre cada registro.

Los registros de representación semiótica son aquellos sistemas semióticos que cumplen con las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación, es decir: constituir un conjunto de marcas identificables como una representación de alguna cosa en el sistema; transformar las representaciones de acuerdo con reglas propias de modo de constituir otra representación y así ganar conocimiento con respecto a la primera; y, convertir las representaciones producidas en un sistema de representación en otro sistema. Estas tres actividades corresponden a las actividades de formación, tratamiento y conversión. Un estudio de los aprendizajes fundamentales debe tener en cuenta: la **diversificación de los registros**; la **diferenciación entre representante y representado**; y, la **coordinación entre los registros**.

Adicionalmente, la Teoría Psicológica de los **Campos Conceptuales** de Vergnaud, atiende a un principio de elaboración pragmática del conocimiento. Como teoría psicológica del proceso de conceptualizar lo real, apunta a localizar y estudiar las filiaciones y las rupturas entre conocimientos desde el punto de vista de su contenido conceptual; a analizar la relación entre conceptos en tanto que conocimientos explícitos y a indagar en las invariantes operatorias implícitas en las conductas del sujeto en situación; así como a explicitar las relaciones entre significados y significantes (Vergnaud, 1990).



Para teorizar sobre el aprendizaje de las matemáticas considera el sentido de situaciones y de símbolos, la acción del sujeto en situación y la organización de su conducta. La ilustran los ejemplos de los campos conceptuales de las estructuras aditivas y multiplicativas, la lógica de clases y el álgebra. Como teoría psicológica del proceso de conceptualizar lo real apunta a: (a) Localizar y estudiar las filiaciones y las rupturas entre conocimientos desde el punto de vista de su contenido conceptual; (b) Analizar la relación entre conceptos en tanto que conocimientos explícitos y las invariantes operatorias implícitas en las conductas del sujeto en situación; y (c) Explicitar las relaciones entre significados y significantes (Vergnaud, 1990).

Aclara el autor: "Estas distinciones de **esquemas y conceptos, invariantes operatorios de concepto en acto** y de teorema en acto, son indispensables para la didáctica porque la transformación de conceptos-instrumento en conceptos-objeto es un proceso decisivo en la conceptualización de lo real. Esta transformación significa entre otras cosas que las funciones proposicionales puedan devenir argumentos. La nominalización es una operación lingüística esencial en esta transformación" (ob. cit., p. 144). Y añade: "no se puede hablar de invariantes operatorios integrados en los esquemas sin la ayuda de categorías del conocimiento explícito: proposiciones, funciones proposicionales, objetos-argumento (...)". En suma señala: "Un acercamiento psicológico y didáctico a la formación de conceptos matemáticos, conduce a considerar un concepto como un conjunto de invariantes utilizables en la acción. La definición pragmática de un concepto recurre al conjunto de situaciones que constituyen la referencia de sus diferentes propiedades, y al conjunto de esquemas puestos en acción por los sujetos en esa situación" (ob. cit. p. 145).

La Didáctica Fenomenológica de las Matemáticas. Siempre en Europa Continental (Holanda y Bélgica) toma cuerpo otro enfoque matemático didáctico apoyado en las reflexiones del matemático holandés Hans Freudenthal. En esta perspectiva se indaga en torno a los fenómenos más allá y más acá de objetos y procedimientos matemáticos. Freudenthal afirma que la explicación y la explicitación de la didáctica, en la cual se ha apoyado la enseñanza tradicional, es la justificación de la enseñanza de una teoría: paradigma tradicional de enseñanza de las matemáticas. Idea clave para el autor es la oposición de dos concepciones de la enseñanza de la matemática: la que concibe a las matemáticas como un producto en oposición a esa otra que las concibe como una actividad. En esta última visión el acento está puesto sobre el proceso requerido para su aprendizaje.

El análisis de **las matemáticas como una actividad** presenta un sistema de "capas" en tanto que el análisis que ve las matemáticas como un producto terminado presenta más bien una estructura deductiva. En este último lo que interesa es la adquisición de conceptos. A juicio del autor, en el enfoque de adquisición de conceptos, la concretización de los conceptos es transitoria y olvidada por los estudiantes. El primer enfoque favorecerá una didáctica de **la matemática como organización de fenómenos y constitución de objetos mentales**: "En mi terminología, la fenomenología de un concepto matemático, de una estructura matemática o de una idea matemática, significa el hecho de describir ese **noumenos** (objeto mental) en relación con los **phainomens** que él permite organizar y a los cuales puede ser extendido; describir la manera como el objeto mental actúa sobre esos fenómenos en tanto instrumento organizador, y describir de que poder nos dota para manejar, manipular esos fenómenos" (Freudenthal, 1983). Así entonces, la didáctica fenomenológica propone una organización de fenómenos con el fin de enseñar a los estudiantes a manipular los significados de esa organización, resultando una matemática estrechamente ligada a la experiencia.

En particular, desde su trabajo de investigación en el Grupo de Enseñanza Matemática (G.E.M.) y en el marco de la didáctica fenomenológica, el matemático belga Nicolás Rouche acuña como consigna central: **"aprender matemática es construir un saber en la cantera de los problemas"**. A su juicio, la construcción del saber se hace en forma progresiva. Partiendo desde contextos y nociones cotidianas, los conceptos iniciales vuelven a aparecer en nuevos contextos y situaciones. Este proceso permite que las primeras nociones vayan evolucionando y progresando en su construcción. El conocimiento no se presenta como definitivo, cada vez que reaparece presenta nuevas facetas, se enriquece, complejizándose.

En este enfoque: (a) El maestro propone una sucesión de problemas que va a alguna parte; (b) El estudiante aprende conceptos matemáticos franqueando "umbrales epistemológicos", evolucionando de modo dialéctico desde contextos familiares con nociones cotidianas a temas matemáticos (constituidos de axiomas y teorías); y, (c) La teoría emerge con un carácter instrumental: cada etapa de este proceso de aprendizaje en espiral, provee elementos teóricos a la vez que usa de los ya construidos en una etapa anterior. En suma para este enfoque, superar el umbral epistemológico mediante la resolución de problemas es hacer matemáticas en forma profunda, ya que, más que la adquisición teórica, aporta una experiencia que es utilizable en actividades matemáticas posteriores y transferible a otros campos.

La didáctica científica de la matemática desde el enfoque socioepistemológico. El doble proceso de desarrollo que se nutre, por una parte, de la reflexión matemática al seno de lo didáctico y de apoyar, por otra, la explicación didáctica con base en la construcción -social e individual- del conocimiento, ha sido una de las principales y más recientes contribuciones de la Matemática Educativa a la didáctica científica de la matemática (Cantoral y Farfán, 1998). Esta línea de investigación de origen latinoamericano, toma como objeto de estudio a la **socioepistemología de los saberes matemáticos** e incluye las **epistemologías de los estudiantes y docentes**, con el fin de rediseñar el **discurso matemático escolar**.

Esta disciplina estudia los **procesos de constitución, transmisión y adquisición de los diferentes contenidos matemáticos en situación escolar**. No se reduce a la búsqueda de una "buena manera" de enseñar una cierta noción fijada previamente, sino que asume como objeto de estudio, por ejemplo, la organización de una actividad cuya intención declarada sea el aprendizaje de un cierto saber aunque este objetivo no sea alcanzado. La investigación se propone afectar positivamente al sistema didáctico; mejorar los métodos y contenidos de enseñanza y proponer las condiciones para un funcionamiento estable de tales sistemas. En suma, busca tener una mayor gestión de las regularidades del funcionamiento de las situaciones de enseñanza, de modo que no sólo trata con la matemática como un tema escolar, sino también, quiere entender cómo y por qué se aprende, y cómo y por qué se estructura el conocimiento con fines didácticos.

Este enfoque didáctico socioepistemológico concibe a la **matemática como actividad humana**, como un producto cultural; construcción humana no está exenta de irs y venires, de nociones que se incorporan paulatinamente a una estructura formal, luego de pasar por etapas de formulación y consenso, resultado de inquietudes socio-culturales, en marcos de paradigmas determinados. Se mira a las personas y la sociedad haciendo matemáticas, construyéndolas, difundiéndolas y aprendiéndolas. La problemática que estudia surge en el ámbito de la matemática escolar, aquella que se significa y resignifica en las aulas de los distintos niveles educativos. Explora "dislexias" intrínsecas a la enseñanza, a los aprendizajes así como a las nociones y procedimientos matemáticos en su deriva histórica, desde el marco de su gestión de aula. Especial atención pone en rastrear las **nociones fundantes del discurso matemático**, incluso antes de que éstas sean formalmente definidas - **su prehistoria cultural** - con el propósito de identificar hitos en su desarrollo, momentos relevantes, significados y sentidos que pudieran haberse diluido y que pudieran proporcionar bases o elementos para un posterior diseño de una situación didáctica que mejora logros de aprendizajes significativos.

Los obstáculos, noción transversal a la didáctica científica de la matemática. El profesorado observa en las producciones de sus estudiantes ideas o contenidos a los que rotula de erróneos toda vez que son distintos de aquellos del currículum explícito que ellos procuran poner en la escena del aula. Este hecho sostuvo por un buen tiempo programas de investigación didáctica que se abocaron al estudio de las "misconceptions", preconcepciones o ideas previas de los estudiantes, en el marco del paradigma del cambio conceptual en la didáctica de la ciencia, el que se abandona progresivamente en tanto se va produciendo un enriquecimiento persistente de marcos teórico didácticos. De analizar los errores en las producciones estudiantiles, se desliza el foco de las indagaciones a los contenidos que se resisten a los entendimientos estudiantiles. A partir de la década de 1980, la noción de obstáculo se instala en la investigación didáctica para colaborar en la búsqueda de respuestas al por qué tales contenidos se revelan resistentes al entendimiento de los estudiantes. Establece la noción de obstáculo epistemológico el filósofo y epistemólogo Gastón Bachelard (1938 citado en Díaz, 1999) en su texto "La formación del espíritu



científico'. Allí puntualiza: "es en el acto mismo de conocer, intimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos las causas de estancamiento y hasta de retroceso, es allí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos" (p.15). Por su parte, la incorporación de la noción de obstáculo en la didáctica de las matemáticas se inicia con la presentación de G. Brousseau en el congreso de la CIEAEM (1976), en Louvain la Neuve. Más adelante el autor discute y examina nuevamente la noción de Obstáculo Epistemológico, contribuyendo al debate sobre las relaciones entre la didáctica y la epistemología de la matemática, precisando que los estudios sobre la base de las concepciones de Bachelard muestran que el error y el fracaso no tienen el rol simplificado que les hizo jugar hasta ese momento la didáctica. Tanto en el funcionamiento del maestro como en el del alumno, el error es constitutivo del sentido del conocimiento adquirido. Esto es, la identificación y caracterización de un obstáculo, son esenciales a los análisis para favorecer aprendizajes. Brousseau transfiere y amplía la noción distinguiendo obstáculos (a) de origen ontogenético que se ligan a las limitaciones de las capacidades cognitivas de los alumnos involucrados en una enseñanza; (b) de origen didáctico para los ligados a las elecciones del sistema de enseñanza; y (c) de origen epistemológico para los obstáculos ligados a la resistencia de un saber mal adaptado, es decir los obstáculos en el sentido original que le daba Bachelard. Sierpiska (1985 citada en Díaz, 1999) retendrá dos aspectos de la noción de obstáculo epistemológico de G. Bachelard, su carácter inevitable -son necesarios para continuar con el desarrollo del conocimiento- y el que su aparición se repite tanto en la filogénesis como en la ontogénesis de los conceptos. Y, para Artigue (1990 citado en Díaz, 1999), lo que fundaría de alguna manera los obstáculos epistemológicos en la didáctica de la matemática, es por una parte, su aparición y su resistencia en la historia de los conceptos en cuestión y por otra parte, la observación de concepciones análogas en los alumnos. Estos no se constituyen con solo certificar la resistencia de esas concepciones en los alumnos actuales. Los nudos de resistencia severa en los estudiantes hoy corresponden a menudo a los puntos en los que un obstáculo de origen epistemológico histórico interviene, reforzado por un obstáculo de origen didáctico. Díaz (1999) reporta otra fuente concurrente a esos nudos, los obstáculos socioculturales con los que refiere a una polifonía de voces portada por el estudiantado y que entra a competir con la voz escolar que propone enseñar el aula bajo una misma denominación. Son cuerpos de conocimientos que tienen naturaleza propia, que ingresan al aula sin conciencia de los protagonistas estudiantes y profesores y que manifiestan gran resistencia a su modificación, nociones cotidianas que están jugándose inconscientemente como obstáculos en el entendimiento de los estudiantes de nociones matemáticas escolares.

Una metodología de investigación en didáctica científica de la matemática: La Ingeniería Didáctica.

El término de Ingeniería Didáctica (ID) surge en el seno de la escuela francesa, a inicios de la década de los ochenta, analogando al quehacer en ingeniería, en tanto que este no sólo se realiza apoyándose en resultados científicos sino que involucra también una toma de decisiones y el control sobre las diversas componentes inherentes al proceso. En términos de Artigue (1995): "En los años ochenta esta visión se percibe como el medio de abordar dos cuestiones cruciales, dado el estado de desarrollo de la didáctica de las matemáticas en la época: las relaciones entre la investigación y la acción en el sistema de enseñanza y el papel que conviene hacerle tomar a las 'realizaciones didácticas' en clase, dentro de las metodologías de la investigación en didáctica" (p. 34). "Ella [I.D.] llega a significar tanto unas producciones para la enseñanza, basadas en resultados de investigaciones que han utilizado metodologías externas a la clase, como una metodología de investigación específica." (p.36). En tanto, producciones para la enseñanza se constituye en una forma de trabajo didáctico comparable al trabajo del ingeniero quien, apoyándose en sus conocimientos científicos de su dominio y aceptando el control de la teoría, se encuentra obligado a trabajar con objetos más complejos que los objetos puros de la ciencia y gestionar entonces, problemas de los cuales la ciencia -investigación didáctica matemática- no quiere o no puede hacerse cargo.

Sus propulsores distinguen cuatro fases temporales en la metodología de la ID, a saber, (i) análisis preliminar; (ii) concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería; (iii) experimentación; y, (iv) análisis a posteriori y evaluación. Destaca Artigue dos trabajos de investigación en esta perspectiva como "clásicos incuestionables" dada la amplitud de las realizaciones didácticas involucradas y la importancia de su aporte teórico: las tesis de G. Brousseau del año 1986 y de R. Douady del año 1984.



En este punto del trabajo, cabe hacer referencia a la naturaleza que van tomando el triángulo didáctico, cada uno de sus actores, la inter-relación de éstos, así como sus articulaciones con otros niveles o facetas del fenómeno educativo, en un marco de creciente confluencia de las miradas indagativas de las ciencias humanas. Transitamos hacia superar algunas oposiciones, herencia de distinciones clásicas de la filosofía y cuyas resonancias en la sociología se expresan en los dipolos: "colectivo-individual", "macro-micro", "objetivo-subjetivo", "acción-estructura". Lo que antes se separaba, ahora se inter-relaciona. La realidad social se considera como constituyendo una totalidad de sentido, una estructura de significaciones sociales, que se manifiesta en sus situaciones particulares, cristalización de múltiples determinaciones sociales, institucionales y personales. De este modo, un episodio encierra una trama de relaciones en la cual dicho

episodio se encuentra inserto, y que explican su particular ocurrencia. Emergen como objetos válidos de investigar para la didáctica de la matemática, entre otros, las epistemologías de los sujetos y de sus prácticas educativas. Ello es coherente con una concepción de realidad social donde los sujetos, por el hecho de formar parte de una trama compleja de interacciones, se encuentran involucrados en una estructura dinámica de significados sociales. La búsqueda de comprensión de lo singular nos va permitiendo descubrir los elementos estructurales comprendidos en una realidad particular: expresión de la relación dialéctica de la acción y la estructura.

Investigaciones que reflejan tales confluencias han develado facetas del aula matemática tales como propósitos implícitos y divergentes de los actores del aula; producciones escolares que esconden obstáculos de origen didáctico; resonancias cotidianas en voces matemáticas que constituyen obstáculos socioculturales a los entendimientos; hitos del desarrollo de una noción matemática cuyos significados y sentidos han desaparecido del aula y que proporcionan bases para rediseños didácticos.

Un ejemplo ilustrativo: obstáculos al aprendizaje del concepto matemático de límite. En un marco socioepistemológico, la investigación doctoral sobre las concepciones del objeto matemático de límite (Díaz, 1999) describe el obstáculo sociocultural para la apropiación de concepto matemático en el nivel terciario de estudios, a saber, la representación cotidiana de límite, esto es, estudiando la microsubjetividad de los estudiantes se añade a la didáctica matemática la fuente de los obstáculos socioculturales para explicar resistencias al aprendizaje significativo de saberes matemático en el aula. Esta evidencia se obtiene como parte de una investigación que aborda la pregunta por aquellas facetas tanto congruentes como contradictorias de las representaciones cotidianas de límite y aquellas de las matemáticas, que favorecen u obstaculizan la formación de un pensamiento variacional en los estudiantes, recurriendo en lo metodológico a la noción de representación para develar las ideaciones estudiantiles y al análisis estructural para interpretar sus discursos. El análisis de la estructura de la noción del límite del habla cotidiana arrojó tres acepciones, a saber, la de *separador cerrado*, que se refiere a la constitución de mundos o realidades excluyentes y se relaciona con la familia de acepciones cotidianas de término, fin y lindes. La de *separador abierto* que se refiere a la familia de acepciones *linde entre y lindero entre*, acepción ésta que distingue entre medios diversos. Y la de *valor en un contexto direccionado*, que distingue según gradaciones crecientes o decrecientes y está más relacionada con excepcional, culmine, cambio, quiebre o transgresión - pasar y sobrepasar.

Se derivaron consecuencias para los aprendizajes del concepto de límite, desde cada uno de los tipos de acepciones con sus contenidos y valoraciones. Las calificaciones para "separador cerrado" y "valor en un contexto direccionado", son acepciones vinculadas a fuerzas socializadoras que se relacionan con la existencia misma del sujeto. "Fuera" significa transgresiones entre cuyas consecuencias se encuentran la inseguridad por la marginación, pasando por un quiebre irreversible en el límite mismo. Entonces el sujeto velará por mantenerse dentro de los márgenes de modo consciente como inconsciente. Ello será una



fuerza sustantiva para evitar el límite y, más aún, "tocarlo". Se le asigna un valor de "extremo-peligro" y de máximos alcanzables "justo antes" del cambio irreversible.

El estudiantado encia el concepto matemático de límite en estas ideaciones, invisibles para sí mismo y para el profesorado. Sus resonancias obstaculizan construir las características del concepto matemático, noción construida por la comunidad matemática en un devenir histórico de varios siglos por lo que es una elaboración extranjera a las elaboraciones y significaciones cotidianas estudiantiles. Éstas, por su parte, se han construido con otros en la enacción, reforzando aquellas facetas que han significado un acoplamiento en la acción eficiente con el entorno -natural, social y cultural- y que configuran el mundo de vida de los jóvenes. El aprendizaje significativo del límite matemático requiere distinguirlos, para dialogar con ambas acepciones, la cotidiana y la matemática y establecer sus dominios de legítima validez, favoreciendo una acción eficiente en cada uno de ellos. El esquema RED ESTUDIANTIL DE LÍMITE que elaboran los estudiantes luego de su enseñanza en el aula, exhibe una mixtura de facetas de las nociones cotidiana y matemática de límite que no auguran una eficacia en la acción en el dominio matemático.

Sobre la base de lo expuesto es posible visualizar diseños de secuencias didácticas que la favorezcan. Desde la mirada de unas matemáticas entendidas como actividad humana cobra vital importancia la persona haciendo matemáticas y no sólo el producto matemático. Por ello, incorporar a los estudiantes a espacios de experimentación que favorezcan la construcción de unas "matemáticas vivas" que dialogan con sus representaciones cotidianas. Reparando en las negociaciones y búsqueda de consenso, entrelazadas éstas con las enacciones de los estudiantes, al momento de enfrentarse a la resolución de un problema y los procesos discursivos específicos en la construcción social del conocimiento matemático. Esto incluye tanto las versiones sobre ciertos temas como la organización del discurso, la manera de hablar, de argumentar, de analizar, de observar, de construir con palabras los resultados de una situación problema, de validar un conocimiento y de establecer una verdad. En suma, diseños que evidencian unas matemáticas que emergen en y con las actividades humanas, en un movimiento que va distinguiendo progresivamente unas matemáticas elaboradas para manipular con el cambio, permitiendo predecir y controlar estados futuros.

Citas y referencias bibliográficas

- Brousseau, G. (1976). *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques*. En Actas del XXVIII C.I.E.A.E.M., Louvain la Neuve, pp 101-117.
- Brousseau, (1987). *Fundamentos de Didáctica de la Matemática*. Manuscrito no publicado. Trad. Centeno J., Melenço, B. y Murillo, J. Prog. Doctorado U. Zaragoza.
- Cantoral, R. (2004). *Desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional. Una Mirada Socioepistemológica*. En L. Díaz (Ed.), ALME (Vol. 17, pp. 1-9). México: Clame.
- Díaz, L. (1999). *Concepciones en el aprendizaje del concepto de límite. Un estudio de casos*. Tesis Doctoral en Ciencias de la Educación, Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile.
- Díaz, L. (2002) *Hacia la construcción de saberes matemáticos en el aula. Enfoques didácticos de investigación*. Boletín de Investigación Educativa, PUC, Santiago, Chile.
- Díaz, L. (2003). *Las representaciones sobre la variación y su impacto en los aprendizajes de conceptos matemáticos*. Proyecto Fondecyt 2003/1030413. UMCE, Santiago, Chile.
- Moscovici, S. (1979). *El psicoanálisis, su imagen y su público, Huelmal*. Buenos Aires. (1era pub. 1961).
- Soto, I. (1993) *La Didáctica Fenomenológica propuesta por H. Freudenthal*. Santiago: CIDE.
- Varela, F. (1990). *Conocer: Las ciencias cognitivas: tendencias y perspectivas*. Barcelona: Ed. Gedisa.
- Varela, F. (1996) *Ética y Acción*, Santiago de Chile: Dolmen Editores